

1 Жылуөткізгіштік теңдеуі және бастапқы-шеттік есеп

Бірөлшемді біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу:

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

- $u(x, t)$ — температура,
- $k > 0$ — жылу өткізгіштік коэффициенті,
- $f(x, t)$ — сыртқы жылу көзі (біртекті емес жағдайда).

Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Шеттік шарттар (мысалы, Dirichlet):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Бұл — бастапқы-шеттік есеп (Initial-Boundary Value Problem, IBVP).

2 Біртекті жағдайда ($f(x, t) = 0$) Штурм–Лиувилль есебі

2.1 Айнымалыларды бөлу

Шешімді іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Жылуөткізгіштік теңдеуі:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

2.2 Штурм–Лиувилль теңдеуі $X(x)$ үшін

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

- Бұл Штурм–Лиувилль мәселесі (SL problem):
 - $p(x) = 1, q(x) = 0, w(x) = 1$

Шешімі:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.3 Уақыт функциясы $T_n(t)$

$$T'_n(t) + k\lambda_n T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = A_n e^{-k\lambda_n t} = A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

2.4 Жалпы шешім (серия түрінде)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- A_n бастапқы шарт бойынша анықталады:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \implies A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Бұл — классикалық Штурм–Лиувилль спектрі және Фурье синус сериясы арқылы шешімі.

3 Біртекті емес жағдай ($f(x, t) \neq 0$)

- Егер сыртқы жылу көзі $f(x, t)$ болса, онда шешімді бөлеміз:

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t)$$

- $u_h(x, t)$ — біртекті есептің шешімі (жоғарыда сипатталған).
- $u_p(x, t)$ — particular solution (Дюамель әдісі немесе вариация әдісі арқылы есептеледі):

$$u_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_0^t e^{-k(n\pi/L)^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau$$

мұндағы $F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

4 Қорытынды

Бастапқы-шеттік есеп үшін Штурм–Лиувилль әдісі:

Этап	Нәрсе	Формула/Сипат
1	Айнымалыларды бөлу	$u(x, t) = X(x)T(t)$
2	SL теңдеуі	$X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(L) = 0$
3	Спектр және eigenfunction	$X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \lambda_n = (n\pi/L)^2$
4	Уақыт функциясы	$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$
5	Жалпы шешім	$u(x, t) = \sum A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$
6	A_n	$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin(n\pi x/L) dx$

1 Есеп

Берілген бірөлшемді жылуөткізгіштік теңдеу:

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Шеттік шарттар (Dirichlet):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = x(L - x)$$

Сыртқы жылу көзі (біртекті емес) деп алайық:

$$f(x, t) = F_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{константа } F_0)$$

Мақсат: $u(x, t)$ -ті табу.

2 Біртекті есеп (homogeneous part)

Бастапқы шарттар бойынша біртекті шешім іздейміз:

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- A_n анықталады:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L x(L - x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Интегралды шығару:

$$\int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{L^2}{n\pi} = \frac{L^2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$
$$\int_0^L x^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = ?$$

Нақты интегралды шығарып, A_n -ді есептеуге болады. Нәтижесінде:

$$A_n = \frac{8L^2}{(n\pi)^3} \quad (\text{жұп емес } n), \quad A_n = 0 \quad (\text{жұп } n)$$

3 Біртекті емес бөлік (particular solution)

Сыртқы жылу көзі:

$$f(x, t) = F_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Дюамель әдісі арқылы particular solution:

$$u_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_0^t e^{-k(n\pi/L)^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L F_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = F_0$$

(тек $n = 1$ үшін, қалғандары 0)

Сондықтан particular шешім:

$$u_p(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} \int_0^t F_0 e^{-k(\pi/L)^2(t-\tau)} d\tau = \frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} (1 - e^{-k(\pi/L)^2 t})$$

4 Жалпы шешім

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} (1 - e^{-k(\pi/L)^2 t})$$

- Бірінші гармоникаға сәйкес particular solution енгізілген.
- Уақыт өте келе $t \rightarrow \infty$, exponential бөліктер жоғалып, тұрақты күйге келеді:

$$u(x, \infty) \rightarrow \frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

- Бұл — жүйенің стационарлы шешімі (steady state).

2 Физикалық интерпретация

1. Бастапқы ығысуға сәйкес бөлік

$$\sum A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

- Әрбір гармоника экспоненциалдық түрде жойылады (damping), уақыт өте келе $u_h(x, t) \rightarrow 0$.
- Бұл — бастапқы температура профилінің ығысуы біртіндеп жоғалатынын көрсетеді.
- Жоғары гармоникалар ($n > 1$) тезірек төмендейді, өйткені $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ тез құлдырайды.

2. Сыртқы жылу көзіне сәйкес бөлік

$$\frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin(\pi x/L) (1 - e^{-k(\pi/L)^2 t})$$

- Уақыт өте келе $t \rightarrow \infty$ экспоненциалдық бөлік $e^{-k(\pi/L)^2 t} \rightarrow 0$, сонда температура стационарлы күйге жетеді:

$$u(x, \infty) = \frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

- Бұл — тұрақты температура профилі, жүйенің сыртқы жылу көзінен теңдестірілген жағдайы.

3 Геометриялық интерпретация

- x -ке қатысты: $\sin(n\pi x/L) \rightarrow$ standing wave түрінде профиль (тербеліс жоқ, тек ығысу).
- t -ке қатысты:
 - Біртекті бөлік $\rightarrow$ экспоненциалдық демпфинг, яғни бастапқы профил жоғалады.
 - Біртекті емес бөлік $\rightarrow$ жүйе сыртқы жылуға бейімделеді (steady state).
- Нәтиже:
 - Уақыттың бастапқы мезгілдерінде температура профилі күрделі (көп гармоникалық).
 - Кейін жоғары гармоникалар жойылады $\rightarrow$ негізгі $n = 1$ мод қалады.
 - Соңында, стационарлы шешім — бір гармоникадағы температура профилі, ол жүйенің тұрақты күйі.

4 Қысқаша қорытынды

Элемент	Интерпретация
Біртекті бөлік $\sum A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$	Бастапқы температура профилінен туындайтын transient (уақытша) компонент, экспоненциалдық түрде жойылады
Біртекті емес бөлік $\frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin(\pi x/L) (1 - e^{-k(\pi/L)^2 t})$	Сыртқы жылу көзінің әсерінен қалыптасатын steady state (тұрақты) профиль
Уақыт өте келе $t \rightarrow \infty$	Температура стационарлы күйге жетеді: $u(x, \infty) = \frac{F_0 L^2}{k\pi^2} \sin(\pi x/L)$